ESPACES VECTORIELS

PLAN

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, et plus spécialement un sous–corps de $\mathbb{C}$, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ lui-même.

I : Généralités

1– Définition et exemples

Les espaces vectoriels sont des groupes additifs munis d'une loi externe sur un corps $\mathbb{K}$. Voici des exemples d'espaces vectoriels :

$\mathbb{C}$ espace vectoriel des complexes sur $\mathbb{R}$.

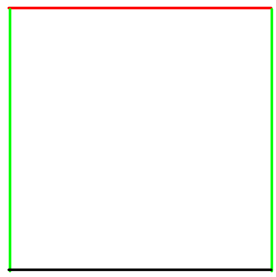
$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sur le corps des réels.

De même $\mathbb{C}^n$ sur le corps des complexes ou plus généralement $\mathbb{K}^n$ sur le corps $\mathbb{K}$.

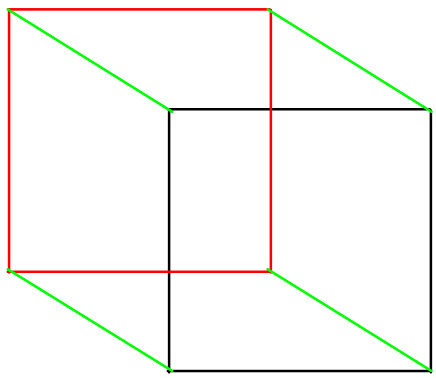
On pourra réfléchir à la notion d'hypercube de dimension 4, d'autant plus facilement qu'on réalisera que les cubes de dimension 3 sont représentés sans difficulté sur un tableau de dimension 2 !!

Partant d'un point translaté d'une longueur donnée, on obtient un segment.

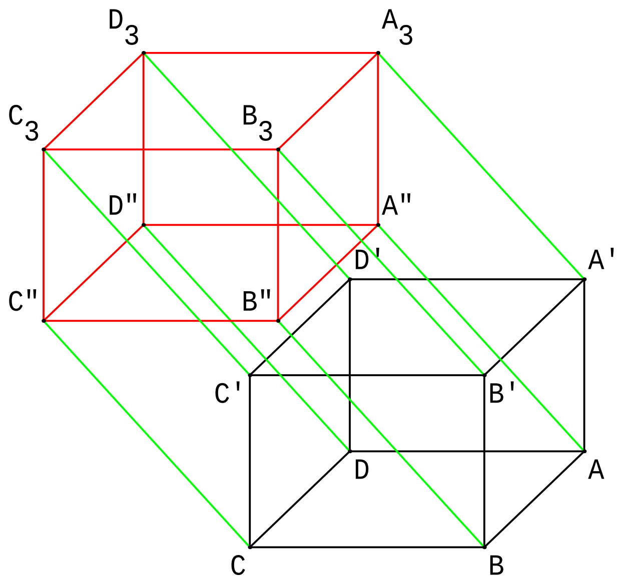
Ce segment, translaté dans une direction orthogonale de la même longueur, donne un carré.



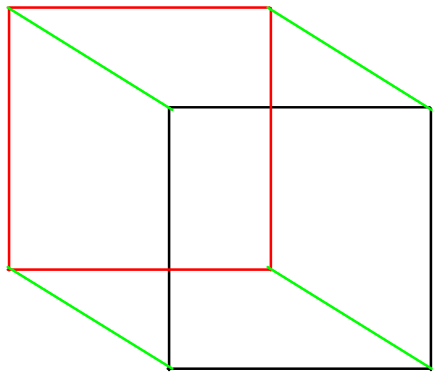
Ce carré, translaté dans une troisième direction, orthogonale aux deux précédentes, donne un cube.



Ce cube, translaté dans une quatrième direction, orthogonale aux trois précédentes, donne un hypercube.



Les objections relatives au fait que cette quatrième dimension n'existe pas ne sont pas recevables. En effet, aucune objection n'est faite en général lors de la construction du cube sur la surface plane constituée d'une feuille de papier ni sur le fait que tous les angles de la figure ainsi tracée sont droits.



L'argument consistant à dire que, certes, le cube est représenté sur une surface plane, mais qu'il existe une troisième dimension extérieure à cette surface, est un argument recevable, mais autorise également la généralisation suivante : l'hypercube est également représenté sur une surface plane. Il peut être également représenté en perspective dans notre espace de dimension 3 (La Grande Arche de la Défense par exemple). Mais ces représentations ne sont que des projections en dimension 2 ou 3 d'un objet quadridimensionnel.

Les structures multidimensionnelles abondent. Il a existé il y a quelques années par exemple un ordinateur parallèle constitué de 65536 processeurs. Ces processeurs étaient reliés entre eux suivant une structure correspondant à celle d'un hypercube de dimension 16 ! Un hypercube de dimension n est l'ensemble des points de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_i = 0$ ou 1. Il y a donc 2^n points. Le nombre a_n d'arêtes vérifie la relation de récurrence :

$$a_n = 2.a_{n-1} + 2^{n-1}$$

ce qui conduit à $a_n = n.2^{n-1}$.

Le nombre f_n de faces de dimension 2 vérifie la relation :

$$f_n = 2.f_{n-1} + a_{n-1} = 2.f_{n-1} + (n-1).2^{n-2}$$

ce qui conduit à $f_n = n(n-1)2^{n-3}$

Le nombre d'hyperfaces de dimension n–1 est égal à $2n$.

D'autres exemples courants d'espaces vectoriels sont :

les suites : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ espace vectoriel des suites réelles, sur le corps des réels, ou plus généralement $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$, sur le corps $\mathbb{C}$.

les fonctions : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sur le corps des réels.

les champs scalaires ou vectoriels. Un champ scalaire est défini par la donnée d'une nombre en chaque point (x,y,z) de l'espace, par exemple le champ de température ou le champ de pression. Ce n'est autre qu'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Un champ vectoriel est défini par la donnée d'un vecteur en chaque point de l'espace, par exemple les champs électriques ou magnétiques, le champ des vitesses du vent... Ce n'est autre qu'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des ces fonctions forme un espace vectoriel appelé espace des champs scalaires ou espaces des champs vectoriels.

Voici la définition générale d'un espace vectoriel :
(E, +, .) est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ si (E,+) est un groupe et si on définit une loi externe noté . de $\mathbb{K} \times$ E dans E vérifiant les axiomes suivants :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E}$
i) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
ii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
iii) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
iv) $1.x = x$ où 1 est le neutre du produit interne de $\mathbb{K}$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, et les éléments de E sont appelés vecteurs.

Il est facile de vérifier que $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des suites ou l'ensemble des fonctions constituent un espace vectoriel. En fait, la définition ne servira que pour ces ensembles de base. D'autres critères sont enduite utilisés pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

En ce qui concerne la règle iv), il faut bien prendre conscience qu'elle ne va pas de soi. 1 est le neutre du produit de $\mathbb{K}$, il n'y a aucune raison pour qu'il adopte une attitude comparable en ce qui concerne le produit externe. C'est le seul résultat d'un produit par un scalaire qui est donné par les axiomes.

Il résulte des axiomes que :
v) $\forall x \in \mathrm{E}, 0.x = 0_{\mathrm{E}}$
où 0 est le neutre de $(\mathbb{K},+)$ et (0_{E}) le neutre de (E,+). De même :
vi) $\forall \lambda \in \mathrm{K}, \lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$
vii) $-1.x = -x$ où -1 est le symétrique de 1 dans $(\mathbb{K},+)$ et $-x$ le symétrique de x dans (E,+).
viii) $\lambda.x = 0_{\mathrm{E}} \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_{\mathrm{E}}$

démonstration :
v) $1.x = x = (1 + 0).x = 1.x + 0.x = x + 0.x \Rightarrow x = x + 0.x \Rightarrow 0.x = 0_{\mathrm{E}}$
vi) $\lambda.0_{\mathrm{E}} = \lambda.(0.x) = (\lambda 0).x = 0.x = 0_{\mathrm{E}}$
vii) $0_{\mathrm{E}} = 0.x = [1 + (-1)].x = x + (-1).x \Rightarrow (-1).x = -x$

viii) Si $\lambda.x = 0_E$ et si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}.0_E \Rightarrow (\frac{1}{\lambda}\lambda).x = 0_E \Rightarrow 1.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$

Une fois définis des espaces vectoriels, il est possible d'en définir d'autres. Par exemple, si E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors $E \times F$ en est un aussi, avec les lois naturelles :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Si E est un espace vectoriel et X un ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E est un espace vectoriel, avec les lois :

$f + g : x \to f(x) + g(x)$
$\lambda f \quad : x \to \lambda f(x)$

2– Sous–espaces vectoriels

Une façon plus rapide de montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel est de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Soit E un espace vectoriel et F une partie de E. F est un sous–espace vectoriel de E si F muni des restrictions des lois de E est un espace vectoriel. Il suffit pour cela que F vérifie :

$\forall x \in F, \forall y \in F, x + y \in F$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda.x \in F$

Il est par exemple inutile de vérifier que $x \in F \Rightarrow -x \in F$. Cela découle de la deuxième propriété avec $\lambda = -1$.

Il y a bien sûr les droites vectorielles, incluses dans les plans vectoriels, inclus dans les espaces vectoriels de dimension supérieure. Mais il y a aussi l'espace vectoriel des fonctions polynomiales, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions continues, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION :
Soit E un espace vectoriel. Une intersection de sous–espaces vectoriels de E est un sous–espace vectoriel de E.

La démonstration est facile et laissée en exercice.

EXEMPLE :
On note $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions n fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'intersection de tous ces sous–espaces vectoriels est un sous–espace vectoriel noté $C^\infty(\mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. $C^0(\mathbb{R})$ est différent de $C^1(\mathbb{R})$ (prendre $|x|$). $C^1(\mathbb{R})$ est différent de $C^2(\mathbb{R})$ (prendre $x^2.\mathrm{sg}(x)$).

3– Sous–espace vectoriel engendré par une partie finie

Une troisième façon de définir un espace vectoriel est de le définir comme sous-espace vectoriel engendré par une partie. Soit $M = \{x_1, ..., x_p\}$ une partie d'un espace vectoriel E. Considérons F l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Il est facile de voir que :

i) F est un sous–espace vectoriel de E.

ii) Si G est un sous–espace vectoriel de E contenant M, alors F est inclus dans G. F est donc le plus petit sous–espace vectoriel de E contenant M.

On dit que F est engendré par M ou que M est un système générateur de F ou une partie génératrice de F. Si F = E, on parle simplement de partie génératrice (sans préciser de E).

EXEMPLE :

❑ $\mathbb{K}^n$ est engendré par les n–uplets (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,1).

❑ Dans $C^0(\mathbb{R})$, et soit n un entier. Les fonctions 1, x, x^2, ..., x^n engendrent le sous–espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

4– Dépendance et indépendance linéaire

a) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les deux parties suivantes :

$$\text{M} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{U}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{V}$$

et

$$\text{N} : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{X}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Y}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{Z}$$

Ces deux parties engendrent le même sous–espace vectoriel, car :

$$\text{X} = \text{V}-\text{U} \quad \text{Y} = \text{V}+\text{U} \quad \text{Z} = -\text{V}+2\text{U}$$

ce qui prouve que le sous–espace vectoriel engendré par N est inclus dans celui engendré par M. Et :

$$\text{U} = \frac{1}{2}(\text{Y}-\text{X}) \qquad \text{V} = 2\text{X}+\text{Z}$$

ce qui prouve que le sous–espace vectoriel engendré par M est inclus dans celui engendré par N.

Les vecteurs de ce sous–espace vectoriel F peuvent s'écrire aU + bV (i) ou aX + bY + cZ (ii).

Considérons un vecteur de composantes x, y et z. A quelle condition appartient–il à F ?

Avec la combinaison linéaire (i), un vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\exists\, a, \exists\, b, \begin{cases} x = a + 2b \\ y = 3b \\ z = a - b \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, a, \exists\, b, \begin{cases} b = \dfrac{y}{3} \\ a = z + \dfrac{y}{3} \\ x = z + y \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée à l'existence est $x = z + y$, équation du plan vectoriel F. On remarquera par ailleurs que pour tout vecteur de F, les coefficients a et b sont uniques.

Avec la combinaison linéaire (ii), un vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\exists\, a, \exists\, b, \exists\, c, \begin{cases} x = a + 3b \\ y = 3a + 3b - 3c \\ z = -2a + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, a, \exists\, b,\ \exists\, c, \begin{cases} a = x - 3b \\ c = -\dfrac{y}{3} + x - 2b \\ z = x - y \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante est la même. Cependant, les coefficients a, b, c ne sont pas uniques. Il en existe une infinité. Cela est lié au fait que, dans le deuxième cas, F est défini par trois vecteurs alors que deux suffiraient. Cela introduit un coefficient supplémentaire arbitraire.

Dans le cas (i), les vecteurs U et V sont dits linéairement indépendants, ou bien (U,V) forme un système libre. Dans le cas (ii), les vecteurs X, Y et Z sont dits linéairement dépendants, ou bien (X,Y,Z) forme un système lié. Cette deuxième terminologie provient du fait qu'il existe une relation de liaison entre X, Y et Z :

$$3X - Y + 2Z = 0$$

b) PROPOSITION–DEFINITION

Soit $(V_1, V_2, ..., V_n)$ un système de n vecteurs d'un espace vectoriel E. Il y a équivalence entre :

i) Toute combinaison linéaire de $(V_1, V_2, ..., V_n)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$

ii) $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i = 0_E \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0.$

Un tel système est dit libre.

Un système qui n'est pas libre est dit lié. Il existe alors $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i = 0_E$.

On prendra garde à différencier *non tous nuls* et *tous non nuls*.

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) : résulte de l'unicité de la décomposition de 0_E.

ii) $\Rightarrow$ i) : se montre en supposant qu'il existe deux décompositions possibles d'un vecteur W. On a alors :

$$W = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i V_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)V_i = 0_E$$

$\Rightarrow \quad \forall i, \lambda_i - \mu_i = 0$

ce qui prouve bien l'unicité de la décomposition.

c) PROPRIETES

Soient A et B deux systèmes de vecteurs :

- *i)* $0_E \in A \Rightarrow A$ *lié.*
- *ii) A lié et* $A \subset B \Rightarrow B$ *lié.*
- *iii)* $V \neq 0_E \Rightarrow (V)$ *libre.*
- *iv) A libre et* $B \subset A \Rightarrow B$ *libre.*
- *v) A lié* $\Rightarrow$ *il existe un des vecteurs de A combinaison linéaire des autres.*

5– Bases

Un système fini de vecteurs libre et générateur s'appelle une base. Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Les scalaires de cette combinaison sont les composantes du vecteur.

EXEMPLES :

❑ Une base de $\mathbb{K}^n$ est (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,1), dite base canonique.

❑ Une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n est 1, x, x^2, ..., x^n.

❑ Si E et F sont deux espaces vectoriels de bases respectives $(e_1, ..., e_p)$ et $(f_1, ..., f_n)$, alors $E \times F$ admet pour base $(e_1, 0_F), ..., (e_p, 0_F), (0_E, f_1), ..., (0_E, f_n)$. En effet, tout couple (x, y) de $E \times F$ avec $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (0_E, f_j)$$

On a donc dim $E \times F$ = dim E + dim F, formule qu'on retrouve implicitement dans :

$$n + p = \dim \mathbb{R}^{n+p} = \dim \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \dim \mathbb{R}^n + \dim \mathbb{R}^p$$

6– Relation de liaison

La méthode ci–dessous permet de rechercher une relation de liaison. On suppose les W_i donnés par leurs coefficients. On fait des combinaisons de façon à disposer d'un triangle de 0.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On fait des combinaisons entre chaque W_i, $i \geq 2$, et W_1 de façon à disposer des zéros en première ligne (Si W_1 possédait un zéro en première ligne, le permuter avec un vecteur ayant un premier coefficient non nul. Si tous les vecteurs possèdent une première composante nulle, passer à la deuxième ligne)

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_1 & W_4-2W_1 & W_5-W_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

On fait de même des combinaisons linéaires entre le deuxième vecteur et chacun de ceux qui suivent de façon à disposer des zéros en deuxième ligne.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+3W_2-5W_1 & W_5+2W_2-3W_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \end{array}$$

On itère.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+2W_3+W_2-5W_1 & 4W_5+3W_3+5W_2-12W_1 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-40\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+2W_3+W_2-5W_1 & 28W_5-20W_4-19W_3+15W_2+16W_1 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\end{array}$$

La relation de liaison est $28W_5-20W_4-19W_3+15W_2+16W_1 = 0$. Si à la fin du processus, on n'obtient pas le vecteur nul, c'est que les vecteurs forment un système libre.

II : Espace de dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il est engendré par une partie finie. Le but de ce paragraphe est de montrer que toutes les bases de cet espace vectoriel sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera dimension de l'espace.

1– Théorème fondamental

THEOREME :
Soit E un espace vectoriel engendré par le système $(V_1, V_2, ..., V_n)$ *et soit* $(W_1, W_2, ..., W_p)$ *un système. Si ce système est libre, alors p est inférieur ou égal à n.*
Autre formulation : si p est strictement supérieur à n, alors $(W_1, W_2, ..., W_p)$ *est un système lié.*

Démonstration :
La démonstration se fait par récurrence sur n. Soit $p > n$.

❑ Cette propriété est vraie pour $n = 1$, car si (W_1, W_2) sont deux vecteurs d'une espace vectoriel engendré par (V), il existe α et β tels que :

$$W_1 = \alpha V \text{ et } W_2 = \beta V$$

Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. Sinon, on a :

$$\beta W_1 - \alpha W_2 = 0$$

et le système est lié.

❑ On suppose la propriété vraie pour n–1 et on la montre pour n. Soit $(W_1, ..., W_p)$ un système d'un espace vectoriel engendré par $(V_1, ..., V_n)$, avec $p > n$. Ecrivons les vecteurs W_i par leur colonne de composantes selon $(V_1, ..., V_n)$ (Ces composantes peuvent ne pas être uniques si $(V_1, ..., V_n)$ est lié).

$$\begin{array}{cccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_p \\ \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{n1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\cdots\\a_{n2}\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}a_{1p}\\a_{2p}\\\cdots\\a_{np}\end{pmatrix}\end{array}$$

Si tous les a_{1i} sont nuls, alors les W_i appartiennent en fait au sous–espace vectoriel engendré par $(V_2, ..., V_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, les W_i forment bien un système lié.

Sinon, l'un des a_{1i} est non nul, par exemple a_{11}. On annule alors la première composante des autres vecteurs :

$$\begin{array}{cccc} W_1 & a_{11}W_2-a_{12}W_1 & \dots & a_{11}W_p-a_{1p}W_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Les $p-1$ derniers vecteurs sont combinaisons des $n-1$ vecteurs $(V_2, ..., V_n)$. Or $p-1 > n-1$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Il existe donc des coefficients λ_i non tous nuls tels que :

$$\lambda_2(a_{11}W_2-a_{12}W_1) + ... + \lambda_p(a_{11}W_p-a_{1p}W_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda_2 a_{12} + ... + \lambda_p a_{1p})W_1 + \lambda_2 a_{11}W_2 + ... + \lambda_p a_{11}W_p = 0$$

On obtient une combinaison linéaire nulle des W_i. Pour voir que le système des (W_i) est lié, il suffit de s'assurer que l'un des coefficients est non nul. Or le coefficient de W_i, $2 \le i \le p$, vaut $\lambda_i a_{11}$, et l'on sait que l'un des λ_i est non nul et que a_{11} est non nul.

2– Théorème de la dimension des bases

THEOREME

Soit E un espace vectoriel engendré par une partie finie. Alors E admet une base, et toutes les bases de E ont même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de E.

Démonstration :

Existence d'une base : Si $(V_1, ..., V_n)$ engendre E et si ce système est libre, il forme une base. S'il est lié, l'un des vecteurs, par exemple V_n est combinaison linéaire des autres. Il n'est pas difficile de voir que $(V_1, ..., V_{n-1})$ reste un système générateur de E. On itère le procédé jusqu'à obtenir un système générateur libre. Cette méthode est constructive.

Dimension des bases : Soient $(V_1, ..., V_n)$ et $(W_1, ..., W_p)$ deux bases. Alors, d'après le 1) :

- ❑ $(V_1, ..., V_n)$ est générateur et $(W_1, ..., W_p)$ est libre donc $p \le n$.
- ❑ $(V_1, ..., V_n)$ est libre et $(W_1, ..., W_p)$ est générateur donc $n \le p$.

Donc $p = n$

CONSEQUENCES :

i) $(W_1, ..., W_n)$ *libre* $\Rightarrow n \le \dim E$
ii) $(W_1, ..., W_n)$ *générateur* $\Rightarrow n \ge \dim E$
iii) $(W_1, ..., W_n)$ *base* $\Rightarrow n = \dim E$
iv) $n > \dim E \Rightarrow (W_1, ..., W_n)$ *lié*
v) $(W_1, ..., W_n)$ *libre et* $n = \dim E \Rightarrow (W_1, ..., W_n)$ *base*
vi) $(W_1, ..., W_n)$ *générateur et* $n = \dim E \Rightarrow (W_1, ..., W_n)$ *base*

Démonstration :

i) résulte du théorème fondamental.
ii) aussi.
iii) est la définition de dim E
iv) est la contraposée de i)

v) Pour tout V de E, $(W_1, ..., W_n, V)$ est lié (d'après iv). Donc il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i + \alpha V = 0$. Il est facile de voir que α est nécessairement non nul, sinon tous les α_i seraient nuls. Donc V est combinaison linéaire des W_i, qui forme donc un système générateur.

vi) Si le système est lié, on pourrait supprimer un des vecteurs combinaison linéaire des autres tout en gardant un système générateur. Cela imposerait que dim E soit inférieur à n.

Les points iv) et v) sont particulièrement utilisés.

4– Théorème de la base incomplète

Un autre moyen de former une base est le suivant :

THEOREME

Soit E un espace vectoriel de base $(V_1, ..., V_n)$*, et soit* $(W_1, ..., W_p)$ *un système libre. Alors il existe* $n-p$ *vecteurs parmi les* V_i *tel que le système constitué de ces* $n-p$ *vecteurs* V_i *et des* W_j *forme une base de E.*

Démonstration :

Par un raisonnement analogue au vi) du paragraphe précédent, on voit que, si $p < n$, il existe l'un des V_i tel que $(W_1, ..., W_p, V_i)$ soit libre. (Si tous les systèmes sont liés, on montrerait comme dans la conséquence vi) du paragraphe précédent que les V_i sont combinaison linéaire des W_j, et donc que les W_j sont générateurs). En notant $W_{p+1} = V_i$, on itère le procédé jusqu'à obtenir n vecteurs libres W_i. Ils forment alors une base. Cette méthode est constructive.

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^4$, on prend la base canonique $(V_1, ..., V_4)$ et le système libre suivant :

$$\begin{array}{cc} W_1 & W_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

(W_1, W_2, V_1) est lié
(W_1, W_2, V_2) est lié
(W_1, W_2, V_3) est libre
(W_1, W_2, V_3, V_4) est libre. Ces quatre vecteurs forment une base.

5– Dimension d'un sous–espace vectoriel

PROPOSITION

Soit F un sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$*.Si* $\dim F = \dim E$*, alors F = E.*

Démonstration :

Parmi tous les systèmes libres de F, on en choisit un maximal. Le nombre des vecteurs de ce système est nécessairement inférieur à dim E. Par ailleurs, étant libre et maximal dans F, il forme une base de F.

Si F est un sous–espace vectoriel de E et si dim F = dim E, alors F = E, puisqu'une base de F étant un système libre, possédant n = dim E vecteurs est aussi une base de E.

Un sous–espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle. Un sous–espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel. Un sous–espace vectoriel de dimension dim(E) – 1 est un hyperplan vectoriel.

6– Rang d'un système de vecteurs

On appelle rang d'un système de vecteurs la dimension du sous–espace vectoriel engendré par ce système. C'est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire du système. Un tel système libre maximal forme une base du sous–espace vectoriel.

III : Somme de sous–espaces vectoriels

1– Somme de deux sous–espaces vectoriels

DEFINITION

Soit E un espace vectoriel, de dimension finie ou non, F et G deux sous–espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G l'ensemble défini par :

$$F + G = \{ z \mid \exists\, x \in F, \exists\, y \in G, z = x + y\}.$$

F + G est le sous–espace vectoriel engendré par la partie $F \cup G$. C'est le plus petit sous–espace vectoriel contenant F et G.

2– Somme directe de deux sous–espaces vectoriels

On s'intéresse à la question de savoir si z peut se décomposer de plusieurs façons sous la forme $x + y$, $x \in F$, $y \in G$. Si la décomposition est unique, la somme est directe.

EXEMPLE 1 :

E de dimension 3, de base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
F plan engendré par $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i})$
G plan engendré par $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

La somme n'est pas directe car :

$$-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \underbrace{-\boldsymbol{i}}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}_{\in G} = \underbrace{-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{k}}_{\in G}$$

EXEMPLE 2 :

E de dimension 3, de base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
F plan engendré par $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$
G droite engendrée par $(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$

La somme est directe car :

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}(y+2x-z)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(y+z)(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}(y-z)(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$$

et il n'y a pas d'autre possibilité.

PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

i) $F \cap G = \{0\}$
ii) $x + y = 0$ *et* $x \in F, y \in G \Rightarrow x = y = 0$
iii) Tout z de F + G s'écrit de manière unique $x + y$, $x \in F$, $y \in G$.

Démonstration :
i) $\Rightarrow$ ii)
Si $x + y = 0$, alors $x = -y$ est élément de F et de G, donc est nul.

ii) $\Rightarrow$ iii)
Si $z = x + y = x' + y'$ avec $x \in F$, $x' \in F$, $y \in G$, $y' \in G$, alors :
$x - x' + y - y' = 0$ avec $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$, donc $x - x' = y - y' = 0$

iii) $\Rightarrow$ i)
Si $z \in F \cap G$, z peut s'écrire $z = \underset{\in F}{z} + \underset{\in G}{0} = \underset{\in F}{0} + \underset{\in G}{z}$
La décomposition étant unique, $z = 0$.

Si une somme est directe, on note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$. La propriété i) est la plus couramment utilisée pur montrer que deux sous–espaces vectoriels sont en somme directe.

3– Supplémentaires

On appelle supplémentaire de F un sous–espace vectoriel G tel que $E = F \oplus G$. Cela signifie :
i) Tout z de E est somme d'un élément de F et d'un élément de G.
ii) Cette décomposition est unique.

ou encore que :
i) $E = F + G$
ii) $F \cap G = \{0\}$

EXEMPLE :
Soit $E = C^0(\mathbb{R})$, on note P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires. Ces deux ensembles sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de E. Toute fonction se décompose en partie paire et partie impaire. On considérera par exemple le cas de l'exponentielle.

On peut définir alors le projecteur p de E sur F parallèlement à G et la symétrie s par rapport à F parallèlement à G :

$$\begin{array}{ccl} E & \rightarrow & E \\ z = \underset{\in F}{x} + \underset{\in G}{y} & \rightarrow & p(z) = x \\ & & s(z) = x - y \end{array}$$

4– Cas de la dimension finie

PROPOSITION

Si E est de dimension finie et si F est un sous–espace vectoriel de E, alors il existe un supplémentaire G de F. Tous les supplémentaires ont pour dimension dim E – dim F.

Démonstration :
Si $(V_1,...,V_n)$ est une base de E et $(W_1,...,W_p)$ une base de F, le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la base de F par $n-p$ vecteurs pour former une base de E. Ces $n-p$ vecteurs engendrent un sous–espace vectoriel G qui sera supplémentaire de F.

PROPOSITION

Soit F et G deux sous–espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors F + G est de dimension finie et :

$$dim\ (F+G) = dim\ F + dim\ G - dim\ (F \cap G).$$

Démonstration :
On notera l'analogie avec la formule Card(A $\cup$ B) = Card(A) + Card(B) – Card(A $\cap$ B)
On choisit une base (u_1, ..., u_p) de F $\cap$ G, que l'on complète en une base (u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q) de F et (u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r) de G. On vérifiera alors que (u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_r) est une base de F + G.

En particulier :

i) dim (F $\oplus$ G) = dim F + dim G

ii) Si F et G sont en somme directe, une base de F $\oplus$ G s'obtient en réunissant une base de F et une base de G

iii) Inversement, si on scinde une base de E en deux systèmes disjoints, ces deux systèmes engendrent deux sous–espaces vectoriels supplémentaires.

IV : Espaces Affines

1– Définition

Considérons l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$. Un complexe $z = a + ib$ peut être considéré comme un vecteur (on parle du vecteur d'affixe z) ou comme un point (on parle du point d'affixe z). Mais il s'agit du même complexe z ! Celui-ci peut donc, au gré de l'utilisateur, être un point ou un vecteur. Il en est de même de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur ou les coordonnées d'un point. C'est seulement l'utilisateur qui va décider du regard qu'il porte sur ce triplet. On peut évidemment généraliser ce point de vue à $\mathbb{R}^n$, mais également à n'importe quel espace vectoriel. Les éléments d'un espace vectoriel peuvent être considérés évidemment comme des vecteurs, mais dans ce paragraphe, nous allons également les considérer comme des points. Se pose alors la question suivante : si a et b, éléments de E sont des points, quel est le vecteur qui les relie ? Si on regarde ce qui ce passe dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur reliant A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à B $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ n'est autre que $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$, autrement dit, B – A. On procèdera de même dans le cas général. Dans E, le vecteur reliant a à b est le vecteur $b - a$. Pour conserver les notations usuelles en géométrie, nous noterons les éléments de E avec une majuscule lorsqu'on les considère comme des points (A et B). Le vecteur ***AB*** n'est autre que B – A.

On a alors les propriétés, bien connue en géométrie :
❑ Le relation de Chasles : ***AB*** + ***BC*** = ***AC*** puisque B – A + C – B = C – A.
❑ Pour tout point A de E, l'application M $\to$ ***AM*** est bijective. Sa réciproque est l'application qui, à un vecteur ***v*** de E associe le point M tel que ***AM*** = ***v***, autrement dit, M – A = ***v***, ce que nous noterons aussi M = A + ***v*** et qui est le translaté de A par la translation de vecteur ***v***.

Voici un exemple moins habituel d'espace affine. Lorsque l'on résout une équation différentielle linéaire à second membre nul, on trouve que l'ensemble Z des solutions est un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de l'équation différentielle. C'est une droite vectorielle pour une équation différentielle du premier ordre, un plan vectoriel pour une équation différentielle du second ordre. Lorsque le second membre est non nul, la solution générale s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit A l'ensemble des solutions avec second membre, et y_0 un élément particulier de A. A et Z sont tous deux inclus dans l'espace E des fonctions. Z est un sous-espace vectoriel de E. Mais A est considéré comme sous-espace affine. Il est en effet judicieux de considérer ses éléments comme des points. Deux éléments y_1 et y_2 de A sont de la forme $y_0 + z_1$ et $y_0 + z_2$, avec z_1 et z_2 éléments de Z. La différence $y_2 - y_1$ est alors un vecteur, élément de Z. De même que l'on obtient un point M d'une droite affine à partir d'un point M_0 de cette droite et d'un vecteur $\boldsymbol{U}$ colinéaire à un vecteur directeur, de façon que $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{M_0M}$, de même on obtient une solution y de A à partir d'une solution particulière y_0 et d'un vecteur de Z, z, de façon que $z = y - y_0$.

2– Barycentres

PROPOSITION :

Soit (A_i) une famille de n points d'un espace et (λ_i) n réels. Alors :

i) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, l'expression $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iM}$ ne dépend pas de M

ii) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iG} = 0$. G s'appelle barycentre des points A_i affecté des coefficients λ_i.

Démonstration :

i) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{M} - \mathrm{A}_i) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$ ne dépend pas de M

ii) On notera $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iG} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{G} - \mathrm{A}_i) \Leftrightarrow \Lambda\mathrm{G} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i \Leftrightarrow \mathrm{G} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

Si le lecteur a un doute sur la validité des notations qui précèdent, il prendra une origine arbitraire O et écrira.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iG} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\boldsymbol{OG} - \boldsymbol{OA_i}) \Leftrightarrow \Lambda\boldsymbol{OG} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{OA_i} \Leftrightarrow \boldsymbol{OG} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{OA_i}$$

L'expression trouvée pour G entraîne également que le barycentre est inchangé lorsque l'on multiplie tous les λ_i par une même constante non nulle. En particulier, on peut diviser tous les λ_i par leur somme, et se ramener ainsi à des λ_i dont la somme vaut 1. G prend alors la forme simple :

$$\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

Si tous les coefficients sont égaux, on parle d'isobarycentre.

EXEMPLES :
❑ Le centre de gravité en physique.

❑ L'indice des prix (les informations ci-dessous datent de quelques années. Elles ont pu être mises à jour depuis) : il s'agit d'un barycentre portant sur 295 articles. A_i est le prix de l'article n°*i*, et λ_i son coefficient de pondération. On a par exemple :

$\Lambda = 10000$
$\lambda_i = 106$ pour le pain
$= 12$ pour le boeuf haché
$= 5$ pour les imperméables
$= 59$ pour les téléviseurs
$= 299$ pour l'automobiles
...

❑ Les distributions de charges unipolaires :
On considère des charges électriques q_i disposées en des points A_i. Si $\sum q_i$ est non nulle, alors on parle de distribution unipolaire. A grande distance, la distribution de ces charges est équivalente à une charge unique égale à $\sum q_i$, disposée au barycentre G des A_i munis des coefficients q_i. Cherchons l'erreur commise sur le potentiel électrique V en un point M éloigné. Notons $\mathbf{r}_i$ le vecteur $\mathbf{GA_i}$ et $\mathbf{r}$ le vecteur $\mathbf{GM}$. On a :

$$A_iM^2 = (\mathbf{GM} - \mathbf{GA}_i)^2 = GM^2 - 2<\mathbf{GM}, \mathbf{GA}_i> + GA_i^2$$
$$= r^2 + r_i^2 - 2<\mathbf{GM}, \mathbf{GA}_i>$$
$$= r^2 \left(1 + \frac{r_i^2 - 2<\mathbf{r}, \mathbf{r}_i>}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{A_iM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r_i^2 - 2<\mathbf{r}, \mathbf{r}_i>}{r^2}\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{<\mathbf{r}, \mathbf{r}_i>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{A_iM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum q_i \left(1 + \frac{<\mathbf{r}, \mathbf{r}_i>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

or $\sum q_i \mathbf{r}_i = \mathbf{O}$

$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \text{ si on note } Q = \sum q_i.$$

❑ Les distributions de charges dipolaires ou multipolaires :
Reprenons l'exemple précédent, mais avec $\sum q_i = 0$. Notons P le barycentre des charges positives, et N le barycentre des charges négatives. Si ces barycentres sont distincts, la distribution est dite dipolaire, sinon elle est multipolaire. Considérons le cas d'une distribution dipolaire. Reprenons le développement limité de $\frac{1}{A_iM}$, en notant cette fois $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ où O est le milieu de [PN], et $\mathbf{r}_i = \mathbf{OA}_i$.

$$\frac{1}{A_iM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r_i^2 - 2<\mathbf{r}, \mathbf{r}_i>}{r^2}\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{<\mathbf{r}, \mathbf{r}_i>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

Le potentiel créé par les charges positives est, en se limitant dans la somme aux indices *i* pour lesquels $q_i > 0$:

$$V^+(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{A_iM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum q_i \left(1 + \frac{<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_i>}{r^2} + O(\frac{1}{r^2})\right)$$

Or $\sum q_i\boldsymbol{r}_i = \mathrm{Q}\boldsymbol{OP}$, en notant Q la somme des charges positives (et donc –Q est égal à la somme des charges négatives).

$$\Rightarrow \qquad V^+(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{OP}>}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$

De même, le potentiel créé par les charges négatives est :

$$V^-(M) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{ON}>}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$

Le potentiel total est :

$$V(M) = V^+(M) + V^-(M) = \frac{Q<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{NP}>}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$

Au terme $O(\frac{1}{r^3})$ près, il s'agit du potentiel électrostatique créé par un dipôle de charges Q disposé en P et –Q disposé en N. Le moment dipolaire est $\mathrm{Q}\boldsymbol{NP}$. On remarquera que le vecteur $\mathrm{Q}\boldsymbol{NP}$ est précisément égal à $\sum q_i\mathrm{A}_i$, c'est-à-dire au vecteur $\sum q_i\boldsymbol{MA}_i$ indépendant de M puisque $\sum q_i = 0$.

Si N et P sont confondus, le potentiel est en $O(\frac{1}{r^3})$ (cas de la distribution multipolaire).

ASSOCIATIVITE DU BARYCENTRE :

Soit G barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$. On partitionne I en k parties disjointes I_i, ..., I_k, de façon que, pour tout i, le barycentre G_i des $(A_j, \lambda_j)_{j\in I_i}$ soit défini (il suffit pour cela que la somme m_i des λ_j pour j élément de I_i soit non nulle). Alors G est le barycentre des $(G_i,m_i)_{i\in\{1..k\}}$

Démonstration :

On a en effet, en supposant que $\sum \lambda_j = \sum m_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i\, G_i = \sum_{i=1}^{k} \left[m_i \sum_{j\in I_i} \frac{\lambda_j}{m_i} A_j \right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\in I_i} \lambda_j\, A_j = \sum_{j\in I} \lambda_j\, A_j = G$$

Cette propriété facilite parfois le calcul du barycentre en fractionnant les difficultés.

BARYCENTRE EN PHYSIQUE

La propriété $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA_i} = 0$ joue un rôle fondamental en mécanique, lorsque les coefficients λ_i représentent les masses m_i des points A_i. En effet, dans bien des cas, un ensemble de points matériels peuvent être remplacés par le barycentre. Cela apparaît dans les théorèmes de Koenig.

Théorème de Koenig pour le moment cinétique :

Le moment cinétique par rapport à un point O d'un système de n points matériels A_i de masse m_i, animés d'une vitesse $\boldsymbol{V}_i$ dans un repère donné vaut :

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GA}_i) \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OG} \wedge m_i \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \boldsymbol{OG} \wedge \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

Or de l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA_i} = 0$, on tire, en dérivant par rapport au temps : $\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{V_i} - \boldsymbol{V_G}) = 0$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_\mathrm{G} = \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} \text{ en notant } \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} + \boldsymbol{L}_\mathrm{G}$$

Le moment cinétique du système par rapport à O est la somme du moment cinétique de G par rapport à O et du moment cinétique du système par rapport à G. A noter que ce dernier peut être calculé à l'aide des vitesses initiales $\boldsymbol{V}_i$ aussi bien qu'à l'aide des vitesses relatives au point G $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\mathrm{G}$, puisque :

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\mathrm{G})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{GA}_i \wedge \boldsymbol{V}_\mathrm{G}$$

$$= \boldsymbol{L_\mathrm{G}}$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{GA}_i = 0$.

<u>*Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique*</u>

Avec les notations précédentes, l'énergie du système dans le repère considéré vaut :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{V}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{V}_\mathrm{G})^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{V}_\mathrm{G}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} \rangle \text{ où } \langle\, , \rangle \text{ désigne le produit scalaire}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{V}_\mathrm{G}^2 + \langle \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} \rangle \text{ où } \langle\, , \rangle \text{ désigne le produit scalaire}$$

or $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{GA}_i = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, V_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, V_G^2$$

L'énergie cinétique du système est égal à la somme de l'énergie cinétique du barycentre et de l'énergie cinétique du système dans le repère lié à G.

3– Sous-espaces affines

DEFINITION :

Soit M_0 un point de E et F un sous–espace vectoriel de E. On appelle sous–espace affine ou variété linéaire affine passant par M_0 de direction F l'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{M_0M}$ appartienne à F. On le note $M_0 + F$.

Si F est une droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{V}$, $M_0 + F$ est appelée droite affine et est égal à $\{M \mid \boldsymbol{M_0M} = \alpha\boldsymbol{V}\} = \{M = M_0 + \alpha\boldsymbol{V}\}$.

Si F est un plan vectoriel engendré par $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$, $M_0 + F$ est dit plan affine et est égal à $\{M \mid \boldsymbol{M_0M} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}\} = \{M = M_0 + \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}\}$.

Si $F = \{0\}$, alors $M_0 + F = \{M_0\}$.

Si $F = E$, alors $M_0 + F = E$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, inclus dans un sous-espace vectoriel G de E, alors tout sous-espace affine $M_0 + F$ sera dit parallèle à tout sous-espace affine $M_1 + G$.

PROPOSITION :

Soit B et C deux sous–espaces affines de direction respectives F et G. Alors, ou bien $B \cap C = \emptyset$, ou bien $B \cap C$ est un sous–espace affine de direction $F \cap G$.

<u>Démonstration</u> :

En effet, si M_0 est un point de $B \cap C$, alors $B \cap C = \{M \mid \boldsymbol{M_0M} \in F \cap G\}$

PROPOSITION :

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points d'un espace affine. L'ensemble des barycentre de ces points affectés de coefficients quelconques forme un sous–espace affine appelé sous–espace affine engendré par les (A_i). Ce sous–espace affine est le sous–espace affine passant par l'un de ces points et de direction le sous–espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\boldsymbol{A_1A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_1A_n})$. C'est le plus petit sous–espace affine contenant la famille de points (A_i).

<u>Démonstration</u> :

Notons B le sous–espace affine passant par A_1 et de direction F le sous–espace vectoriel engendré par $(\boldsymbol{A_1A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_1A_n})$. Tous les A_i sont éléments de B.

Si G est barycentre des (A_i, λ_i), avec $\sum \lambda_i = 1$, alors :

$$G = \sum \lambda_i A_i \Rightarrow \boldsymbol{A_1G} = \sum \lambda_i\, \boldsymbol{A_1A_i} \text{ est élément de } F$$

ce qui prouve que G est élément de B.

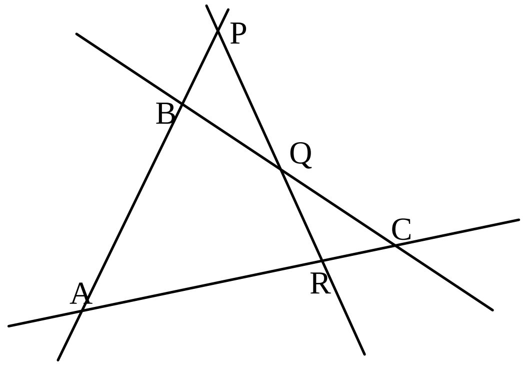
Inversement, si G est élément de B, alors il existe des λ_i, $2 \le i \le n$, tels que :

$$\boldsymbol{A_1G} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \, \boldsymbol{A_1A_i}$$

Si l'on pose $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n$, alors l'égalité précédente est équivalente à écrire que G est barycentre des (A_i, λ_i), $1 \le i \le n$.

Enfin, soit *C* un sous–espace affine contenant les A_i. Alors la direction de *C* contient *F*, et *C* contient *B*, puisqu'il ne peut lui être strictement parallèle, puisqu'ils ont des points en commun.

EXEMPLE : Le théorème de Ménélaus (fin du Ier siècle)
Il s'énonce :
Soit un triangle ABC, et trois points distincts de A, B et C : P sur (AB), Q sur (BC) et R sur (AC).



Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$

Dans la notation ci-dessus, $\overline{PA}$ désigne la mesure algébrique du couple (P,A). Il s'agit de la composante du vecteur ***PA*** suivant un vecteur directeur de la droite (AB). Cette mesure dépend du vecteur directeur choisi, mais le quotient $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ n'en dépend pas.

Pour montrer que cette condition est nécessaire, on peut raisonner sur les coefficients de P, Q et R, comme barycentres de A, B et C. Si A, B et C ne sont pas alignés et si on impose à la somme des coefficients d'être égale à 1, il y a en effet unicité des coefficients. Cela est équivalent à faire un calcul vectoriel, mais préserve la symétrie des rôles joués par A, B, C ou P, Q, R :

	A	B	C
P	p	$1-p$	0
Q	0	q	$1-q$
$R = \lambda P + (1-\lambda)Q$	$1-r = \lambda p$	$0 = \lambda(1-p)+(1-\lambda)q$	$r = (1-\lambda)(1-q)$

On en déduit que $\lambda = -\dfrac{q}{1-p-q}$, d'où $r = \dfrac{(1-p)(1-q)}{1-p-q}$ et $1-r = -\dfrac{pq}{1-p-q}$

Par ailleurs : $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\dfrac{1-p}{p}$, $\dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = -\dfrac{1-q}{q}$ et $\dfrac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -\dfrac{1-r}{r}$

D'où le résultat.

La réciproque se montre de la façon suivante :
Soient P, Q, R trois points vérifiant la relation, et soit R' l'intersection de (PQ) et (AC). Alors P, Q et R' vérifient également la relation, ce qui prouve que R et R' sont les mêmes barycentres relativement à A et C. Ils sont donc égaux.

4– Parties convexes

DEFINITION :
Une partie C d'un espace affine A est dite convexe si, pour tout point M et N de C, le segment [M,N] est inclus dans C.

Le segment [MN] est défini comme étant l'ensemble des barycentres de M et N à coefficients positifs.

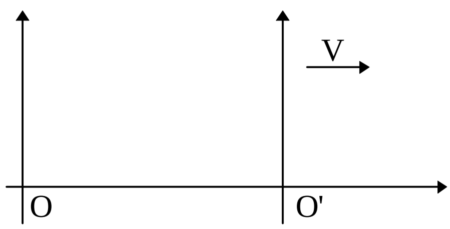
EXEMPLES : Un disque, un sous–espace affine, un demi–plan. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

PROPOSITION :
Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes. Alors $\cap\, C_i$ est un convexe.
La démonstration se déduit directement de la définition sans difficulté.

Annexe : un exemple de changement de repère, l'effet Doppler-Fizeau et le paradoxe des jumeaux

- Effet Doppler en mécanique classique :

Considérons deux repère Ox et Ox' en translation l'un par rapport à l'autre à la vitesse V. O' se déplace par rapport à O dans le sens des x croissant, à la vitesse V, et symétriquement, O de déplace par rapport à O' dans le sens des x' décroissant, à la vitesse –V.



❑ Considérons une impulsion émise par O' périodiquement se propageant dans le milieu lié à O à la vitesse c (cas du son émis par un véhicule O' en mouvement, et reçu par un observateur O immobile par rapport à l'air ambiant). Si une impulsion est émise par O' à l'instant t alors que O' se trouve en $x > 0$, O recevra cette impulsion à l'instant :

$$T = t + \frac{x}{c}$$

En effet, il faut ajouter à t la durée pendant laquelle le signal se propage de O' en O. (Si x était négatif, il faudrait écrire $T = t + \frac{|x|}{c}$).

L'impulsion suivante est émise à l'instant $t + \Delta t$, alors que O' se trouve en $x + \Delta x = x + V\Delta t$. O recevra cette impulsion en :

$$t + \Delta t + \frac{x + V\Delta t}{c} = T + \Delta T$$

ce qui donne $\Delta T = (1 + \frac{V}{c})\, \Delta t$. En ce qui concerne la fréquence émise f_e et la fréquence reçue f_r, inverse des périodes, on a :

$$\boxed{f_r = \frac{f_e}{1 + \frac{V}{c}}} \quad \textbf{(eq.1)}$$

Ainsi, si V > 0, autrement dit, si O' s'éloigne, on a l'impression que, vues de O, les impulsions reçues ont une fréquence inférieure à celle des impulsions émises par O'. S'il s'agit d'un son [Doppler], O recevra un son plus grave que celui émis par O' (cas d'une sirène d'ambulance qui s'éloigne). S'il s'agit de lumière [Fizeau], celle-ci sera décalée vers le rouge dans le repère O par rapport à la lumière émise dans le repère O' (décalage vers le rouge des galaxies dans la théorie de l'expansion de l'Univers).

Au contraire, si V < 0, autrement dit si O' se rapproche, la fréquence est plus elevée. Le son est plus aigu. La lumière est décalée vers le bleu.

❑ Considérons maitenant un signal émis par O et reçu par O'. Si une impulsion est émise par O à l'instant t alors que O' se trouve en $x > 0$, O' recevra cette impulsion à l'instant T tel que :

$$c(T - t) = x + V(T - t)$$

condition pour laquelle le signal et O' se trouve au même endroit et au même instant T. On a donc :

$$T = t + \frac{x}{c - V}$$

On aurait pu aussi considérer que le signal se déplace à la vitesse $c - V$ dans le repère lié à O', ce qui conduit au même résultat.

L'impulsion suivante est émise par O en $t + \Delta t$ alors que la distance séparant O et O' est $x + V\,\Delta t$. Le signal est reçu par O' en :

$$T + \Delta T = t + \Delta t + \frac{x + V\,\Delta t}{c - V}$$

ce qui donne $\Delta T = (1 + \frac{V}{c - V})\, \Delta t = \frac{1}{1 - \frac{V}{c}}\, \Delta t$ soit :

$$\boxed{f_r = f_e\,(1 - \frac{V}{c})} \quad \textbf{(eq.2)}$$

L'interprétation est que le décalage de fréquence sonore ou lumineuse est la même que précédemment. Les formules sont cependant différentes dans les deux cas, car le problème n'est pas symétrique. O est immobile dans le milieu dans lequel se propage le signal, et non O'.

- <u>Effet Doppler en mécanique relativiste</u> :

Franchement, est-ce bien sérieux de parler de mécanique relativiste à ce niveau d'étude ? Tss ! Tss !

Les formules précédentes sont vraies pour le son, mais fausses pour la lumière ou les ondes électromagnétiques. En effet, celles-ci se déplacent à la vitesse c aussi bien dans le repère O que dans le repère O'. Cette constatation expérimentale a conduit à la naissance de la théorie de la relativité restreinte. Pour expliquer mathématiquement ce phénomène, il a fallu renoncer aux changements de repères utilisés précédemment, renoncer à la notion de simultanéité des événements dans des repères différents, et pour cela introduire un temps propre à chaque repère (t pour O, t' pour O'). Les changements de repères utilisés sont donnés dans le fichier FPLSVAR2.PDF du cours de deuxième année mais ne seront pas utiles ici. Nous admettrons simplement deux conséquences de ces changements de repères, la dilatation des temps et la contraction des longueurs.

Un intervalle de temps $\Delta t'$ observé par O' n'aura pas la même durée pour O. Ce dernier le verra sous la forme $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$. De même, un intervalle de temps ΔT observé par O sera vu par O' avec la durée $\Delta T' = \dfrac{\Delta T}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$. La symétrie entre les deux observateurs est totale. Les deux formules précédentes ne sont pas contradictoires car les deux expériences sont différentes. Dans le premier cas, on observe par exemple une horloge immobile par rapport à O' et mobile par rapport à O ; dans le deuxième cas, on observe une horloge mobile par rapport à O' mais immobile par rapport à O. Chacun verra l'horloge de l'autre tourner plus lentement que la sienne. Ce phénomène ne doit pas paraître plus surprenant que le fait que deux voisins éloignés habitant deux maisons identiques verront pourtant la maison de l'autre sous un angle de vision plus petit que la sienne propre.

Quant à la contraction des longueurs, elle s'exprime comme suit. Une règle de longueur $\Delta l'$ observée par O' dans son repère sera vue par O avec la longueur $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$. De même, une règle de longueur ΔL observée par O dans son repère sera vue par O' avec la longeur $\Delta L' = \Delta L \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$. Si les deux règles sont identiques, cela signifie que chacun verra la règle de l'autre plus courte que la sienne. Là non plus, il n'y a pas de contradiction car, les deux expériences sont là aussi différentes. Dans le premier cas, O doit repérer l'endroit où se trouvent les deux extremités de la règle de O' au même instant t, alors que dans le second cas, c'est à un instant donné t' que O' fait ses mesures. Or dire que deux événements se font au même instant t n'est pas équivalent à dire qu'ils se font au même instant t'.

Observons maintenant comment sont modifiées nos considérations sur l'effet Doppler :

❑ Considérons une impulsion émise par O' périodiquement se propageant à la vitesse c. Si une impulsion est émise par O' à l'instant t' pour O' et t pour O, alors que O' se trouve en $x > 0$, O recevra cette impulsion à l'instant :

$$T = t + \frac{x}{c}$$

L'impulsion suivante est émise par O' à l'instant $t' + \Delta t'$, mais du fait de la dilatation des temps, la deuxième impulsion est émise dans le repère O non pas après un intervalle $\Delta t'$, mais après un intervalle $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$. O' se trouve alors en $x + \Delta x = x + V\Delta t$ et O recevra cette impulsion en :

$$t + \Delta t + \frac{x + \mathrm{V}\Delta t}{c} = \mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}$$

ce qui donne $\Delta\mathrm{T} = (1 + \frac{\mathrm{V}}{c})\ \Delta t$ ou encore $\Delta\mathrm{T} = \Delta t' \sqrt{\frac{1 + \frac{\mathrm{V}}{c}}{1 - \frac{\mathrm{V}}{c}}}$, soit :

$$\boxed{f_r = f_e \sqrt{\frac{1 - \frac{\mathrm{V}}{c}}{1 + \frac{\mathrm{V}}{c}}}} \quad \textbf{(eq.3)}$$

L'interprétation est que le décalage de fréquence lumineuse est la même que dans le cas classique, mais la formule est légèrement différente. Elle diffère d'un terme en $\frac{\mathrm{V}^2}{c^2}$ par rapport à la formule classique. Les rôles de O et O' étant ici parfaitement symétriques, la formule est analogue si c'est O qui émet le signal.

- Le paradoxe des jumeaux

Il est d'usage de présenter ce paradoxe à l'aide de jumeaux, l'un qui voyage pendant que l'autre reste sur Terre. Nous préférons utiliser comme personnages le Lièvre et la Tortue ☺. Pendant que la Tortue reste immobile, le Lièvre court à la vitesse V sur une longueur L puis fait demi-tour pour revenir vers la Tortue. En relativité restreinte, on montre que la Tortue a vieilli davantage que le Lièvre. Cela est souvent présenté comme paradoxal car du point de vue du Lièvre, c'est la Tortue qui s'éloigne puis qui revient. En fait, il n'y a pas symétrie entre les deux personnages car le Lièvre change de repère galiléen en cours de trajet et pas la Tortue. Leur situation est donc différente, et effectivement, le temps s'écoule différemment pour l'un et pour l'autre. Bien évidemment, cela est un effet relativiste et rien de tel n'apparaît en mécanique classique.

Nous supposerons que le Lièvre et la Tortue émettent tous deux chaque seconde une impulsion lumineuse. Cela permet à chacun d'eux de mesurer le temps écoulé chez l'autre en comptant le nombre d'impulsions. Bien évidemment, il faudra tenir compte de l'effet Doppler.

Montrons d'abord que, dans le cas classique, le nombre d'impulsions émises par chacun des protagonistes est le même.

❑ *Point de vue classique du Lièvre* : le Lièvre atteint la borne en le temps $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}$. Compte tenu de l'effet Doppler, il reçoit des impulsions de la Tortue à la fréquence $1 - \frac{\mathrm{V}}{c}$ (**eq.2**). Le nombre d'impulsions reçues est donc $n_1 = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}\,(1 - \frac{\mathrm{V}}{c})$. Le Lièvre fait demi-tour et revient au départ en le temps $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}$, mais les impulsions reçues sont cette fois à la fréquence $1 + \frac{\mathrm{V}}{c}$ (V a changé de signe). Il reçoit donc un nombre d'impulsions $n_2 = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}\,(1 + \frac{\mathrm{V}}{c})$. Le nombre total d'impulsions émises par la Tortue et reçue par le Lièvre est donc $n_1 + n_2 = 2\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{V}}$, qui n'est autre que le temps écoulé sur l'horloge de la Tortue.

❑ *Point de vue classique de la Tortue* : la Tortue voit le Lièvre partir. Elle reçoit de sa part des impulsions à la fréquence $\dfrac{1}{1+\dfrac{V}{c}}$ (**eq.1**), jusqu'à ce que le Lièvre fasse demi-tour. Mais la Tortue ne saura qu'il a fait demi-tour que lorsqu'elle recevra l'impulsion émise par le lièvre lorsqu'il atteint la borne. Cela se produit à l'instant $\dfrac{L}{V}+\dfrac{L}{c}$ et elle aura reçu $n_1' = (\dfrac{L}{V}+\dfrac{L}{c})\ \dfrac{1}{1+\dfrac{V}{c}} = \dfrac{L}{V}$ impulsions. Elle voit alors le Lièvre courir pendant le temps restant $\dfrac{L}{V}-\dfrac{L}{c}$, temps durant lequel il envoie à la Tortue des impulsions qu'elle reçoit à la fréquence $\dfrac{1}{1-\dfrac{V}{c}}$. Elle reçoit donc $n_2' = (\dfrac{L}{V}-\dfrac{L}{c})\ \dfrac{1}{1-\dfrac{V}{c}} = \dfrac{L}{V}$ impulsions. Le nombre d'impulsions émises par le Lièvre et reçue par la Tortue est donc de $2\,\dfrac{L}{V}$, temps mesuré sur l'horloge du Lièvre. Dans les deux repères, le temps écoulé est de $2\,\dfrac{L}{V}$

Voyons maintenant ce qu'il en est en mécanique relativiste.

❑ *Point de vue relativiste du Lièvre* : Le Lièvre voit la borne située à une distance L de O et en mouvement par rapport à lui à la distance $L' = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\ L$ (contraction des longueurs du point de vue de O') et l'atteint donc en le temps $t' = \dfrac{L'}{V} = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\ \dfrac{L}{V}$. Il reçoit des impulsions de la Tortue à la fréquence $\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}}}$. Il a donc reçu $n_1 = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\ \dfrac{L}{V}\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}}} = \dfrac{L}{V}\ (1-\dfrac{V}{c})$ impulsions de la tortue. Il fait demi-tour et revient au départ en le même temps $\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\ \dfrac{L}{V}$ pendant lequel il reçoit $n_1 = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\ \dfrac{L}{V}\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{V}{c}}{1-\dfrac{V}{c}}} = \dfrac{L}{V}\ (1+\dfrac{V}{c})$ impulsions. En effet, la fréquence des impulsions reçues est cette fois de $\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{V}{c}}{1-\dfrac{V}{c}}}$. Le nombre d'impulsions émises par la tortue est donc $2\,\dfrac{L}{V}$, égal au temps écoulé sur l'horloge de la Tortue.

❑ *Point de vue relativiste de la Tortue* : La Tortue voit le Lièvre partir. Elle ne saura qu'il a fait demi-tour que lorsqu'elle recevra l'impulsion émise par le lièvre lorsqu'il atteint la borne. Cela se produit à l'instant $t = \dfrac{L}{V}+\dfrac{L}{c}$. Recevant du Lièvre des impulsions à la fréquence $\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}}}$, elle aura reçu $n_1' = (\frac{L}{V} + \frac{L}{c})\sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} = \frac{L}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ impulsions. Elle voit alors le lièvre courir pendant le temps restant $\frac{L}{V} - \frac{L}{c}$, temps durant lequel il envoie à la tortue des impulsions qu'elle reçoit à la fréquence $\sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$. Elle en reçoit donc $n_2' = (\frac{L}{V} - \frac{L}{c})\sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$ soit $n_2 = \frac{L}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ impulsions. Le nombre d'impulsions émises par le Lièvre est donc de $2\,\frac{L}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$. Pour la Tortue, ce nombre d'impulsions est égal au temps écoulé sur l'horloge du Lièvre. Le Lièvre a moins vieilli que la Tortue puisque le nombre d'impulsions qu'il a émises est inférieur au nombre d'impulsions émises par la Tortue.